

Temat: Zastosowanie metody liczb zespolonych do obliczania prądu sinusoidalnego.

Impedancja rezystora:

$$\underline{Z}_R = R$$

Impedancją idealnego rezystora jest część rzeczywista, część urojona jest zerowa.

Impedancja cewki indukcyjnej:

$$\underline{Z}_L = jX = j\omega L$$

Impedancja idealnego induktora jest urojona (przy zerowej części rzeczywistej)

$X > 0$ - charakter indukcyjny

Impedancja kondensatora:

$$\underline{Z}_C = jX = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

Impedancja idealnego induktora jest urojona (przy zerowej części rzeczywistej)

$X < 0$ - charakter pojemnościowy

METODA SYMBOLICZNA – WYKORZYSTANIE W PRAKTYCE

Przebieg czasowy napięcia dany jest wzorem:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Przechodzimy na postać tzw. wartość zespoloną:

$$\underline{U} = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

Aby przejść należy amplitudę **podzielić** – w przypadku przebiegu sinusoidalnego – przez pierwiastek z dwóch, natomiast argument wykładnika potęgi jest przesunięcie fazowe, ponieważ czas jest zerowany, więc nie uwzględniamy pulsacji. Zatem wartość zespolona jest niezależna od czasu.

Łączenie impedancji: analogicznie jak przy łączeniu rezystancji

Przykład 1. (metoda symboliczna – impedancja)

Obliczyć impedancję dwójnika, dla danej pulsacji. Wynik przedstawić w postaci algebraicznej i wykładniczej.

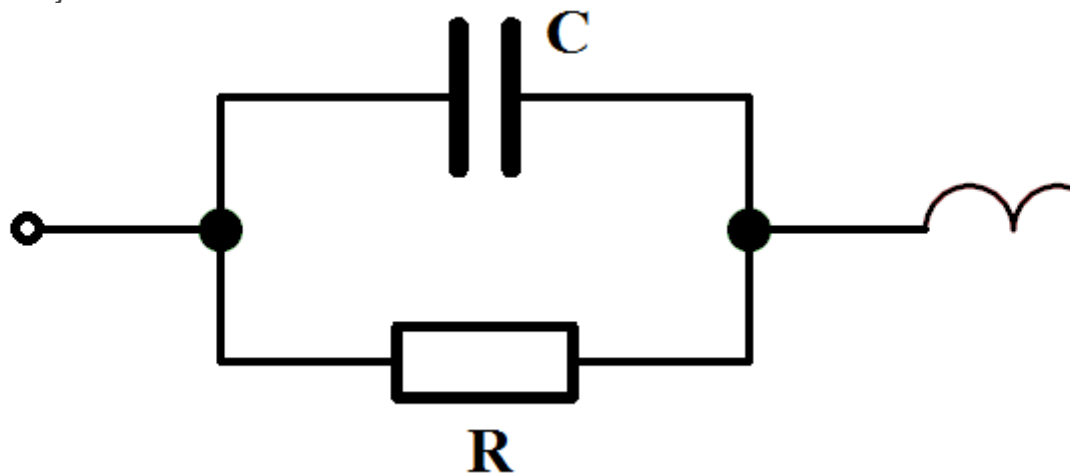
Dane:

$$R = \frac{1}{2} \Omega$$

$$L = \frac{3}{20} H$$

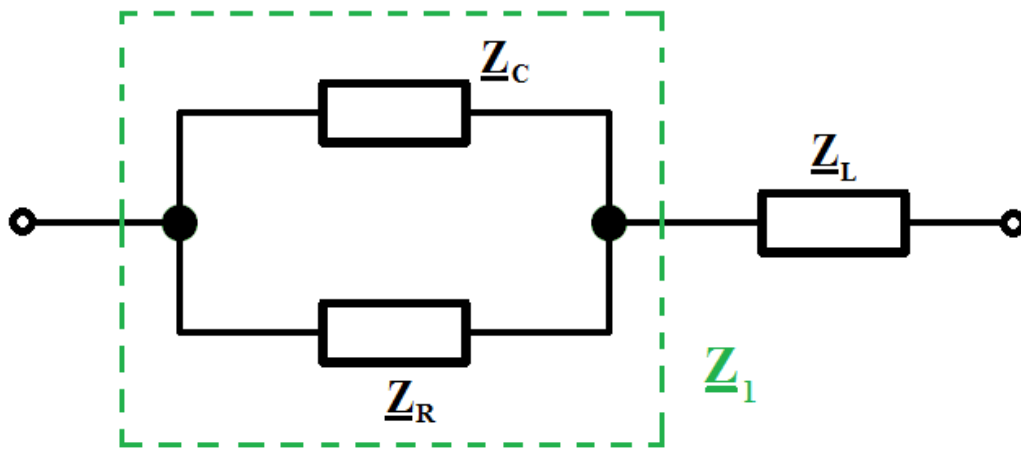
$$C = 2 F$$

$$\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$



Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności wstawmy w układ impedancje zgodnie ze wzorami.



Następnie

łączymy impedancje zgodnie z zasadami jak przy łączeniu rezystancji. Poniżej odpowiednie równania:

$$\underline{Z}_R = R = \frac{1}{2} \Omega$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j\frac{6}{20} \Omega$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4} \Omega$$

Łączenie impedancji, dzielenie liczby zespolonej – czyli mnożenie przez sprzężenie, wynik ostateczny w postaci algebraicznej i przejście do postaci wykładniczej poprzez trygonometryczną.

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{R} + j\omega C = 2 + j4$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{2 + j4} * \frac{2 - j4}{2 - j4} = \frac{2 - j4}{2^2 - j^2 4^2} = \frac{2(1 - j2)}{4 + 16} = \frac{1 - j2}{10}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_L = \frac{1 - j2}{10} + j\frac{3}{10} = 0.1 + j0.1$$

Ostatecznie:

$$\underline{Z} = 0.1 + j0.1 = \sqrt{0,02} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{0,02} * e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Przykład 2. (metoda symboliczna – Prawo Ohma)

W danym poniżej schemacie obwodu panuje stan ustalony. Należy wyznaczyć prąd $i(t)$.

DANE:

$$R = 3 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{2} F$$

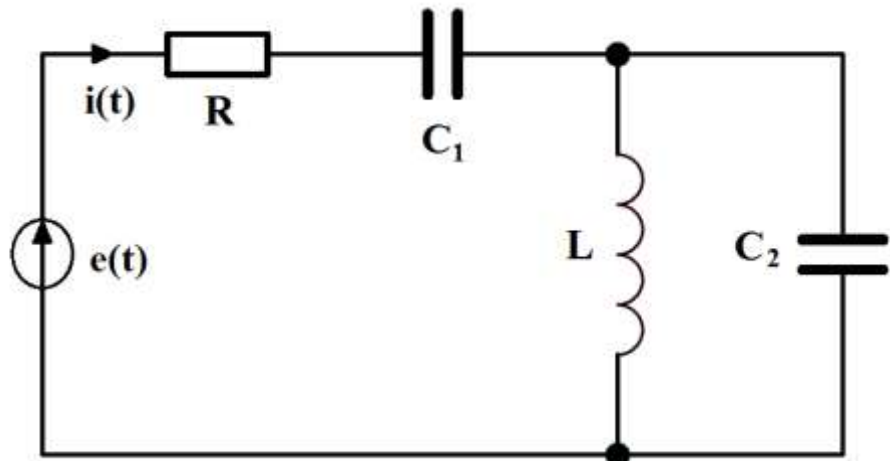
$$C_2 = \frac{1}{2} F$$

$$L = 1 H$$

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$e(t) = 3\sqrt{2}\sin\omega t [V]$$

$$i(t) = ?$$



Rozwiązanie:

Aby rozwiązać tego typu zadanie należy skorzystać z metody symbolicznej i Prawa Ohma. Napięcie mamy dane: $e(t)$. Szukamy prąd $i(t)$, zatem po zamianie na wartość zespoloną nasze Prawo Ohma przyjmie postać:

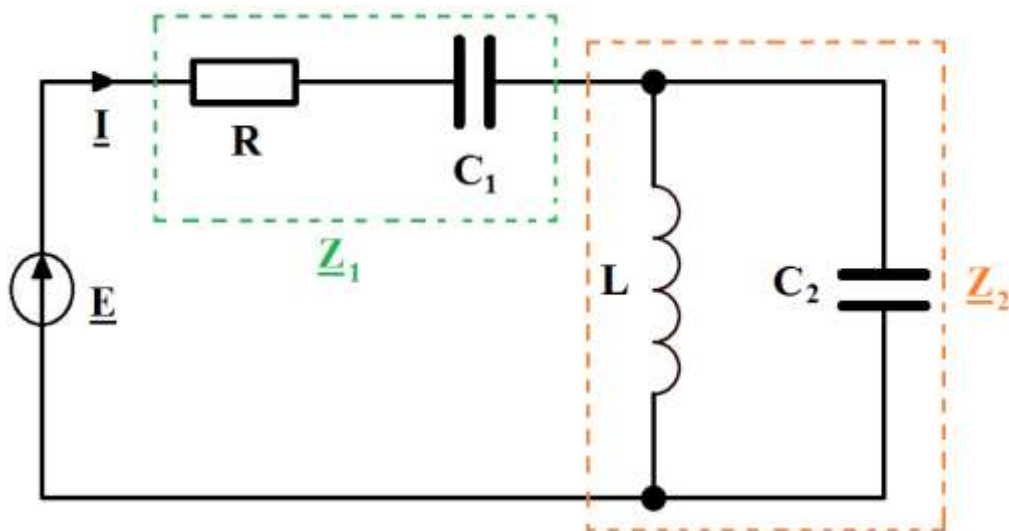
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

Prąd w metodzie symbolicznej to \underline{I} , napięcie to \underline{E} , natomiast \underline{Z} jest impedancją, czyli oporem. Wniosek jest taki, że aby wyznaczyć przebieg prądu należy wyznaczyć impedancję, dzięki temu będziemy mogli podstawić pod wzór.

Zacznijmy od zamiany przebiegu czasowego napięcia na wartość zespoloną:

$$e(t) = 3\sqrt{2}\sin\omega t \Rightarrow \underline{E} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 3 [V]$$

Następnie wyznaczmy impedancję:



zasadami łączenia impedancji wyprowadzono następujące wzory:

Zgodnie z

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2 \rightarrow \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2}$$

Impedancje łączymy szeregowo i wstawiamy wartości dane w zadaniu:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2}$$

$$\underline{Z} = 3 + \frac{1}{j} + \frac{1}{\frac{1}{j2} + j} = 3 - j3$$

Teraz można już skorzystać z prawa Ohma, a wartość zespoloną prądu zamienić na przebieg czasowy:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{3}{3 - j3} * \frac{3 + j3}{3 + j3} = \frac{9 + j9}{18} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} (\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) [A] = \underline{\underline{\sin(2t + 45^\circ) [A]}} \quad (\text{odp!})$$

Zatem odpowiedzią jest wynik $i(t) = \sin(2t + 45^\circ)$.